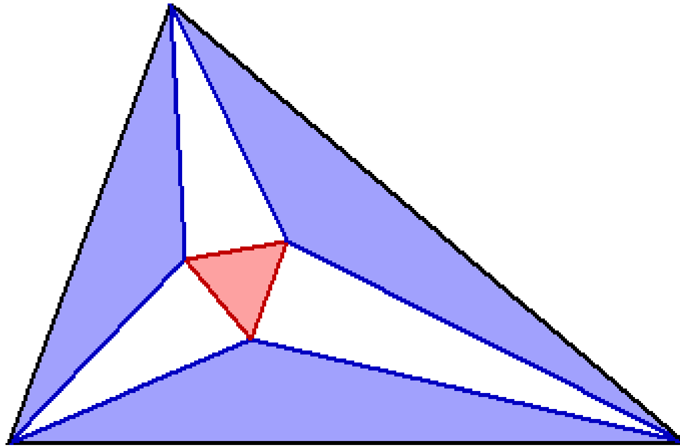
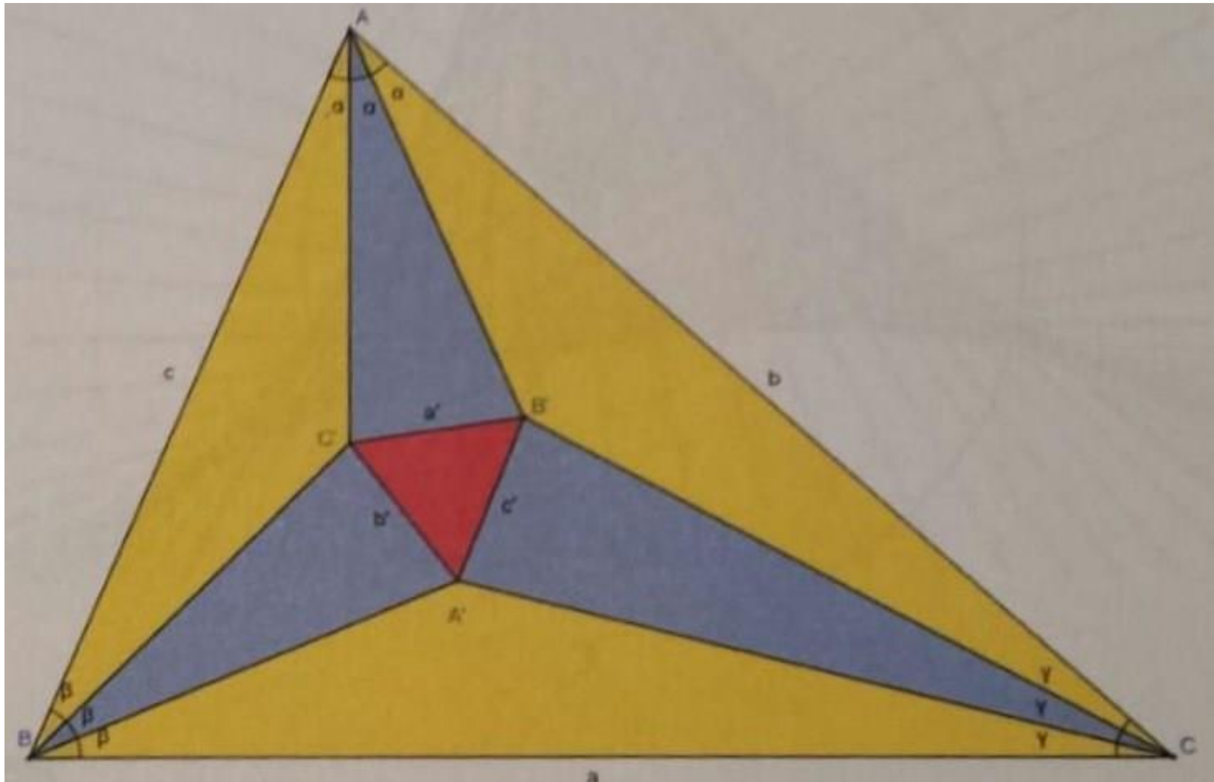
Mirakel van Morley

Jacques Jansen



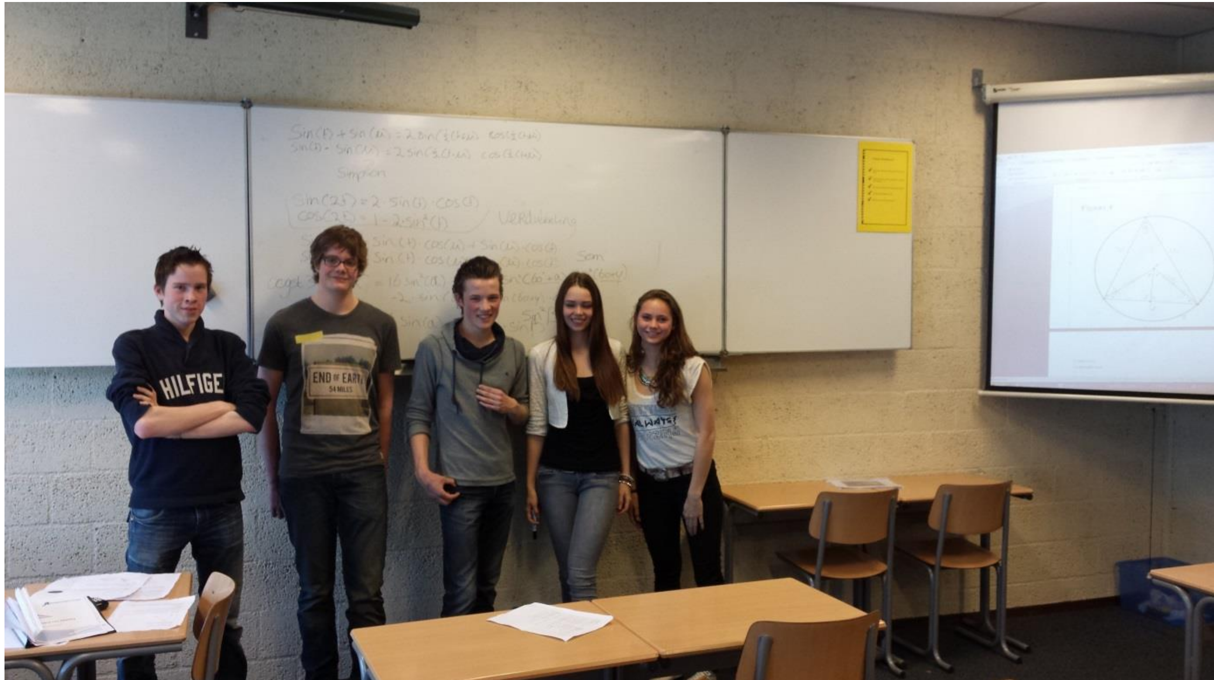
Ideale oefening als afsluiting van de Goniometrie in 6 VWO.

Bruikbaar als P.O .



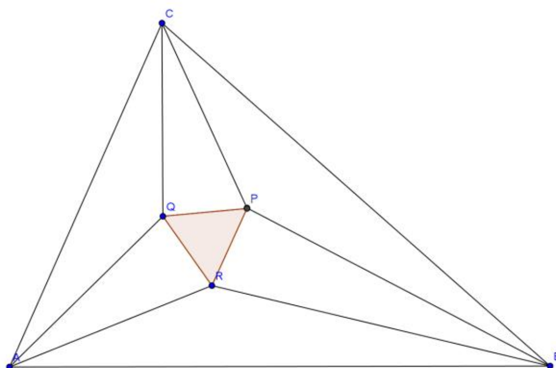
“Vergeten Stelling uit de Vlakke Meetkunde”

Instructies van docent



Tijdens hun presentatie: van links naar rechts: Guus, Jelle, Dirk, Yosha en Rachel

- Intro;
- Aantal beschikbare lessen
- Benodigde boeken
- Check kennis over GeoGebra. Mogelijkheid om thuis eraan te werken?
- Afspraken over werkstuk en presentatie
- Deadline
- Beoordeling



Het Mirakel van Morley Leerlingenversie

Van bissectrice (deellijn) naar trisectrice (driedelingslijn).

Dit onderzoek beschrijft, aan de hand van opgaven, hoe je een direct bewijs voor de Stelling van Morley kunt aanleren. Het bevat vrijwel alle goniometrie die in het huidige examenprogramma zit en laat je kennis maken met een fraaie eigenschap van de trisectrices in een driehoek. Zie de driehoeken op het frontblad.

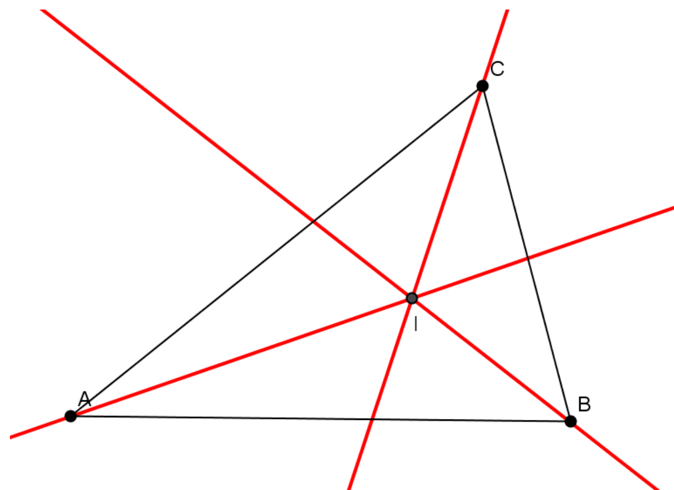
Het probleem gaat over een mooie eigenschap van trisectrices in een driehoek.

Als men in een willekeurige driehoek *ABC* de hoeken in drieën deelt, vormen de snijpunten van de steeds tegen de zijden aanliggende driedelingslijnen, een gelijkzijdige driehoek *PQR*. Zie figuur 2.

Deze bewering wordt de Stelling van Morley genoemd, ook wel de Trisectricestelling.

Wat weten we al? Bissectrices in een driehoek.

Een bissectrice of een deellijn van een hoek is een rechte die de gegeven hoek in twee even grote hoeken verdeelt. Een bekende eigenschap van een willekeurige driehoek *ABC* is dat de drie deellijnen van de drie hoeken precies door één punt gaan. Zie figuur 1.



Figuur 1

1a. Teken met behulp van het computerprogramma GeoGebra een willekeurige ΔABC en teken de bissectrices erin.

b. Ga na wat buitenbissectrices zijn en teken die er ook in.

c. Onderzoek hoe de buitenbissectrices liggen ten opzichte van de binnenbissectrices.

De trisectricestelling Trisectrices in een driehoek

Een hoek kun je in gedachte verdelen in drie gelijke hoeken. De twee benodigde lijnen worden trisectrices (driedelingslijnen)genoemd. Er is bewezen dat constructie met passer en liniaal onmogelijk is. Voor sommige driehoeken kunnen we in GeoGebra wel een goede tekening ontwerpen. Bijvoorbeeld voor driehoeken met hoeken van $45^\circ, 60^\circ$ en 75°.

2a. Teken met behulp van GeoGebra een ΔABC met $\angle A = 45^\circ, \angle B = 75^\circ$ en $\angle C = 60^\circ$ en teken de zes trisectrices.
b. Teken ΔPQR, zie Trisectricestelling, in ΔABC en onderzoek of deze gelijkzijdig is.
c. Bedenk nog een andere samenstelling van de hoekensom van 180 graden waarbij het eenvoudig is om de bijbehorende driehoek te teken met de zes trisectrices.

Om te bewijzen dat ΔPQR, zie figuur 2, gelijkzijdig is lijkt het voor de hand liggend, om van twee hoeken aan te tonen, dat ze elk zestig graden groot zijn. In het verleden zijn wiskundigen er niet in geslaagd om via deze weg een direct bewijs te leveren. Toch is het de moeite waard om een poging te wagen en na te gaan tegen welke problemen je aanloopt.

3. Probeer dit bewijs te leveren voor een willekeurige ΔABC en schrijf op welke problemen je hierbij tegenkomt.

In 1904 gaf Frank Morley de Stelling over trisectrices maar wie was Morley?

Wie was Frank Morley?



Frank Morley (1860-1937) was een vooraanstaand Engels-Amerikaans wiskundige. Hij was vooral bekend om zijn onderwijs en onderzoek op het gebied van algebra en meetkunde. Van hem is bekend de trisectricestelling. Hij was ook een sterke schaker.

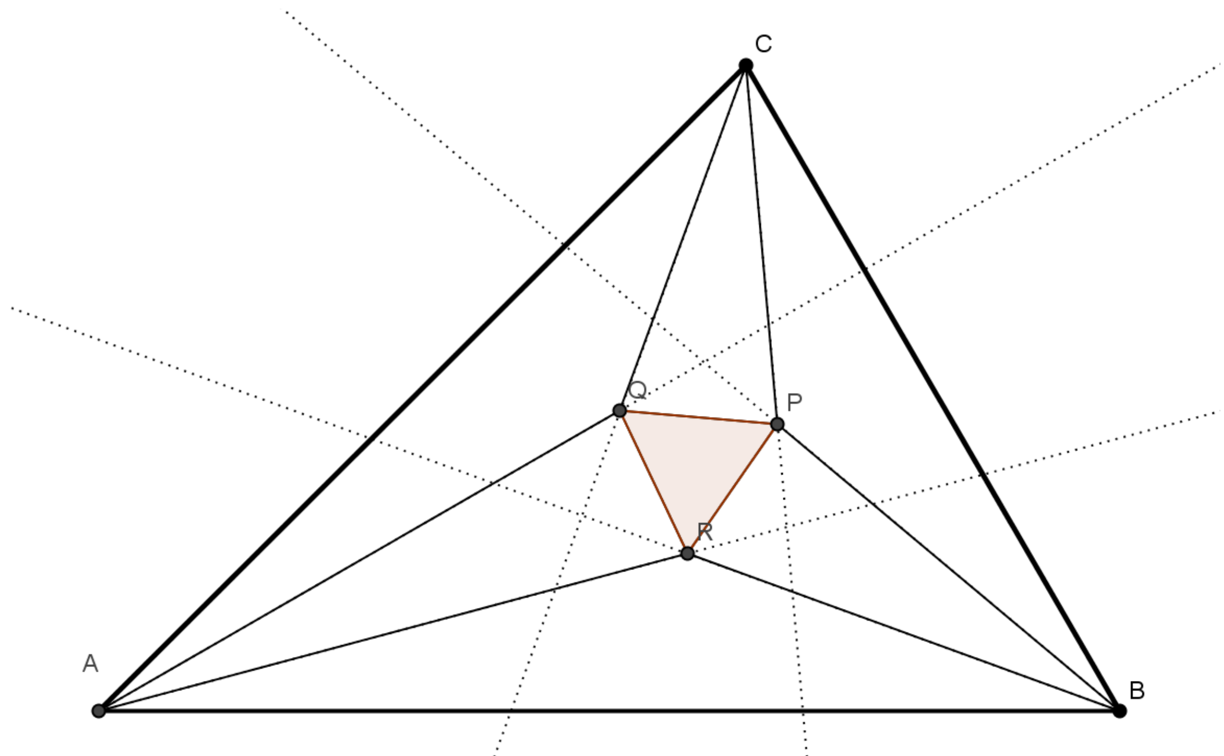
Anekdote

Zijn zoon Frank, ook een wiskundige, schreef over zijn vader het volgende:

Hij tastte dan in zijn vestzakje naar een potloodstompje van een paar centimeter en in een zijzak naar een oude enveloppe om vervolgens wat steels naar zijn studeerkamer te verdwijnen en mijn moeder riep dan uit: "Frank, je gaat niet werken!" en het antwoord was steevast: "Min of meer, een beetje maar"-en dan ging de deur van de studeerkamer dicht.

Zie figuur 2. Net zoals bij de Stelling van Pythagoras zijn er veel bewijzen geleverd. Eén ervan gaan we bekijken en stap voor stap doornemen. Het wiskundig gereedschap dat nodig is voor dit bewijs, komt uit de goniometrie.

Figuur 2



Goniometrie

Het benodigde Gonio-gereedschap staat in het kader van figuur 3.

Figuur 3

Hulpmiddelen uit de Goniometrie

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

$\sin(180^\circ - t) = \sin(t)$

Verdubbelingsformules

$\sin(2t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$

$\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2(t)$

Somformules

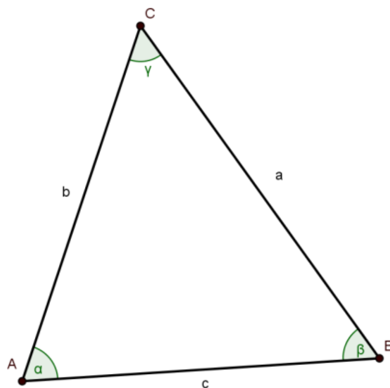
$\sin(t+u)=\sin(t)\cdot\cos(u)+\cos(t)\cdot\sin(u)$

$\sin(t-u)=\sin(t)\cdot\cos(u)-\cos(t)\cdot\sin(u)$

Simpsonformules

$\sin(t)+\sin(u)=2\sin(\frac{1}{2}(t+u))\cdot\cos(\frac{1}{2}(t-u))$

$\sin(t)-\sin(u)=2\sin(\frac{1}{2}(t-u))\cdot\cos(\frac{1}{2}(t+u))$



Sinusregel : $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Cosinusregel: $a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$

$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta$

$c^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\gamma$

Het is verder handig om voor het bewijs een tweetal afspraken te maken.

Eerste afspraak

Om het werken met breuken zoveel mogelijk te voorkomen stellen we, zie ΔABC in figuur 2, dat hoek A gelijk is aan 3α. Dat doen we ook bij de overige twee hoeken.

Korter opgeschreven: $\angle A=3\cdot\alpha,\angle B=3\cdot\beta$ en $\angle C=3\cdot\gamma$.

Er geldt dus:

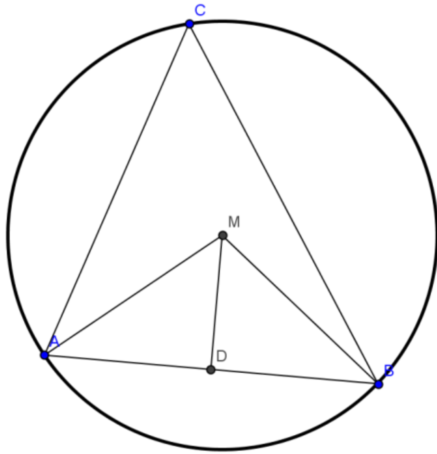
$\alpha+\beta+\gamma=60^\circ$

4. Leg dat uit.

Tweede afspraak

We maken nog een andere afspraak. ΔABC heeft een omgeschreven cirkel, zie figuur 4, en de diameter ervan stellen we gelijk aan 1. De reden hiervan is dat de zijden van de ΔABC nu eenvoudig uit te drukken zijn in goniometrische verhoudingen.

Figuur 4



Merk op dat $\angle AMB = 2 \cdot \angle ACB$ (Stelling omtrekshoek). Vanuit middelpunt M van de omgeschreven cirkel is een loodlijn neergelaten op koorde AB. D is het voetpunt van die loodlijn.
Er geldt dat: $AB = \sin \angle C$ en $BC = \sin \angle A$ en $AC = \sin \angle B$.
5. Bewijs dat.

Oogst (1):

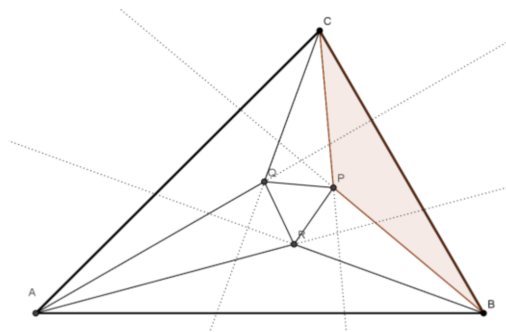
In ΔABC, zie figuur 2, geldt:
- $AB = \sin(3\gamma)$
- $BC = \sin(3\alpha)$
- $AC = \sin(3\beta)$

Hoofdlijnen van het bewijs

We gaan eerst de hoofdlijnen van het bewijs doornemen.

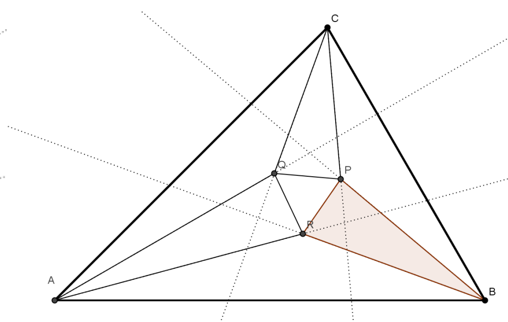
We gaan bewijzen dat de zijden van ΔPQR even lang zijn. We proberen voor zijde *PR*, zie figuur 2, een uitdrukking te vinden van goniometrische verhoudingen waarin de hoeken α, β en γ in voorkomen.

Figuur 5



ΔCPB

figuur 6



ΔBRP

(1) We concentreren ons eerst op ΔCPB. We rekenen met behulp van de sinus-regel eerst zijde *BP* uit. Dan kunnen we ook zijde *BR* uitrekenen.

(2) Tot slot, met de cosinus-regel in ΔBRP, rekenen we *PR* uit.

Nu echt aan de slag

(1) **We gaan een goniometrisch uitdrukking zoeken voor zijde *BP* en *BR*.**

In ΔCPB geldt:

- $BC = \sin(3\alpha)$ Zie oogst 1 na vraag 5.
- $\dfrac{BP}{\sin(\gamma)} = \dfrac{BC}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)}$ (toepassing van de Sinus-regel)
- Eerder vonden we: $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.
- $BP = \dfrac{\sin(3\alpha) \cdot \sin(\gamma)}{\sin(60^\circ - \alpha)}$

6. Laat zien hoe deze uitdrukking voor *BP* is gevonden.

Deze uitdrukking voor *BP* willen we vereenvoudigen. Eerst pakken we die sin(3α) aan.

Met behulp van somformule kunnen we schrijven:

$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$.

7. Laat die afleiding zien.

We moeten proberen sin(3α) als een product te schrijven zodat er een factor $\sin(60^\circ - \alpha)$ in voorkomt: $\sin(3\alpha) = (...........) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)$

8. Leg uit waarom dat dit handig is.

Voor die herschrijving hebben we veel handelingen (formules) nodig, vandaar de volgende *uitlegmatrix*.

Uitdrukking	**Pas toe ……..**
$\sin(3\alpha)$	Somformule
$3\sin(\alpha)-4\sin^3(\alpha)$	Factor $\sin(\alpha)$ buiten haakjes halen
$\sin(\alpha)(3-4\sin^2(\alpha))$	ontbinden
$\sin(\alpha)(\sqrt{3}-2\sin(\alpha))(\sqrt{3}+2\sin(\alpha))$	$\sqrt{3}$ vervangen door $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ om te kunnen werken met $\sin(60^\circ)$ maar wel zodanig dat de uitdrukking niet in waarde verandert.
$4\sin(\alpha)(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\sin(\alpha))(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sin(\alpha))$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ vervangen door $\sin(60^\circ)$
$4\sin(\alpha)(\sin 60^\circ-\sin(\alpha))(\sin 60^0+\sin(\alpha))$	Simpsonformule
$4\sin(\alpha)(2\sin 0,5(60^\circ-\alpha)\cos 0,5(60^\circ+\alpha)\cdot$ $2\sin 0,5(60^0+\alpha)\cos 0,5(60^\circ-\alpha)$	Verdubbelingsformule
$4\sin(\alpha)(\sin(60^\circ-\alpha))(\sin(60^0+\alpha))$	Invullen in $BP=\frac{\sin(3\alpha)\cdot\sin(\gamma)}{\sin(60^\circ-\alpha)}$
$BP=\frac{4\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\sin(\gamma)}{\sin(60^\circ-\alpha)}$	Deel teller en noemer door factor $(\sin(60^\circ-\alpha))$
$BP=4\sin(\alpha)\cdot\sin(\gamma)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$	

9. Ga al die handelingen zorgvuldig na in de tweede kolom van de *Uitlegmatix.*

We moeten nog een uitdrukking vinden voor *BR.*
Door α met γ te verwisselen in $BP=4\sin(\alpha)\cdot\sin(\gamma)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$ vinden we :
$BR=4\sin(\gamma)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\gamma)$.

Oogst (2)

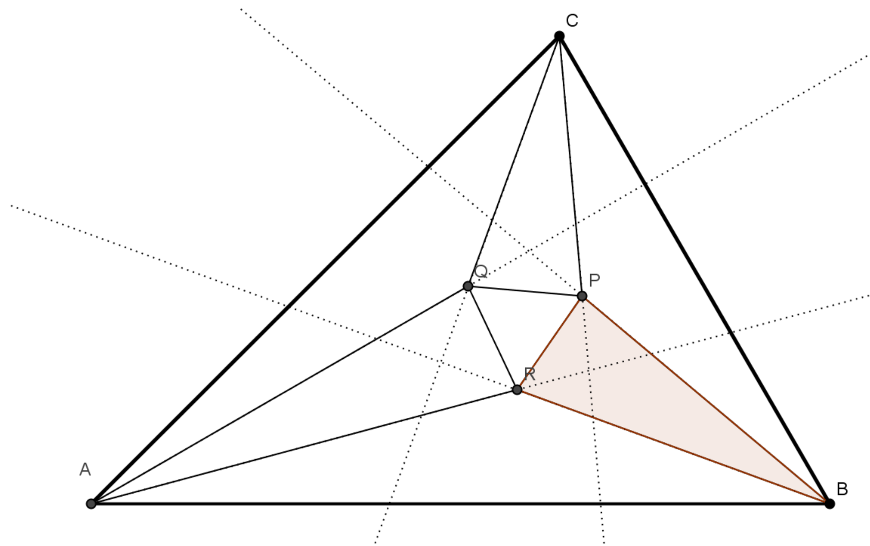
$$BP=4\sin(\alpha)\cdot\sin(\gamma)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$$

$$BR=4\sin(\gamma)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\gamma)$$

(2) We gaan een uitdrukking zoeken voor zijde *PR.*

In ΔBRP passen we de cosinusregel toe:

Figuur 7



- $PR^2 = BP^2 + BR^2 - 2 \cdot BP \cdot BR \cdot \cos(\beta)$
- $PR^2 = 16 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \sin^2(\gamma) \cdot \sin^2(60^\circ + \alpha) + 16 \cdot \sin^2(\gamma) \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \sin^2(60^\circ + \gamma)$
  $- 2 \cdot 4\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot 4\sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(60^\circ + \gamma) \cdot \cos(\beta)$
- Er zijn factoren, zoals $\sin^2(\alpha)$ die buiten de haakjes zijn te halen:

Oogst (3) :

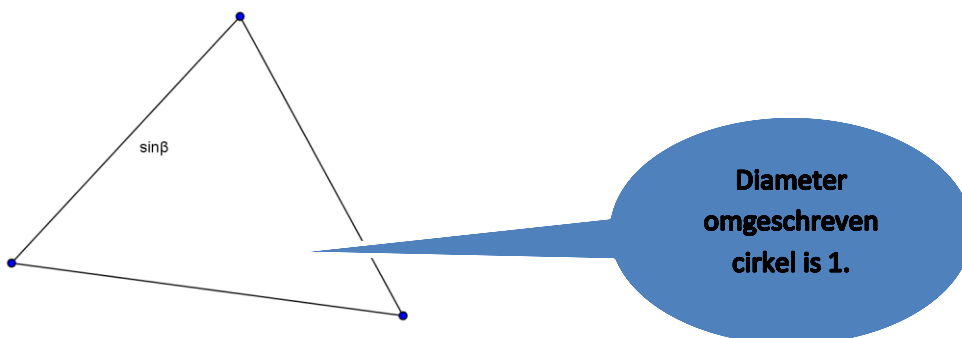
$$PR^2 = 16\sin^2(\alpha) \cdot \sin^2(\gamma) \cdot (\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \gamma) \cdot \cos\beta)$$

Tussen de haakjes herkennen (fraaie vondst) we opnieuw het toepassen van de Cosinusregel met de hoeken $60^\circ + \alpha, 60^\circ + \gamma$ en β in een driehoek waarvan de omgeschreven cirkel diameter 1 heeft. Zie figuur 8.

10. Laat zien dat de hoeken $60^\circ + \alpha$, $60^\circ + \gamma$ en β samen 180 graden zijn.

In figuur 8 staat een schets van een driehoek met hoeken van $60^\circ + \alpha$, $60^\circ + \gamma$ en β.

Bij één zijde staat de lengte ervan: $\sin\beta$.



Figuur 8

11. Zet de twee andere lengtes en de grootten van de drie hoeken $60^\circ+\alpha$, $60^\circ+\gamma$ en β in figuur 8.

Er geldt in deze driehoek:

$$\sin^2(\beta)=(\sin^2(60^\circ+\alpha)+\sin^2(60^\circ+\gamma)-2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\gamma)\cdot\cos\beta)$$

12. Laat dat zien met behulp van de gegevens in figuur 8.

Er geldt verder: $PR^2=16\sin^2(\alpha)\cdot\sin^2(\gamma)\cdot\sin^2(\beta)$

13. Toon dat aan, met behulp van “oogst (3) ” boven vraag 10, en controleer onderstaande oogst (4).

Oogst (4):

$$PR=4\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)$$

14. Leg uit dat je voor QP en QR dezelfde uitdrukkingen krijgt en dus ΔPQR een gelijkzijdige driehoek is.

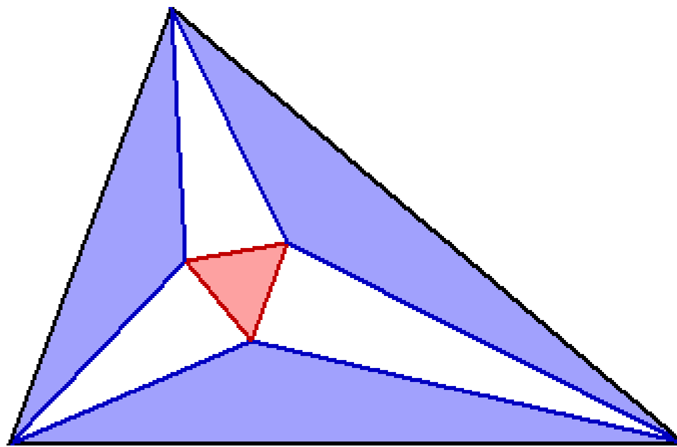
15. Ga nog eens na welke gonio-formules er allemaal gebruikt zijn en hoe vaak dat is gedaan.

Terugblik



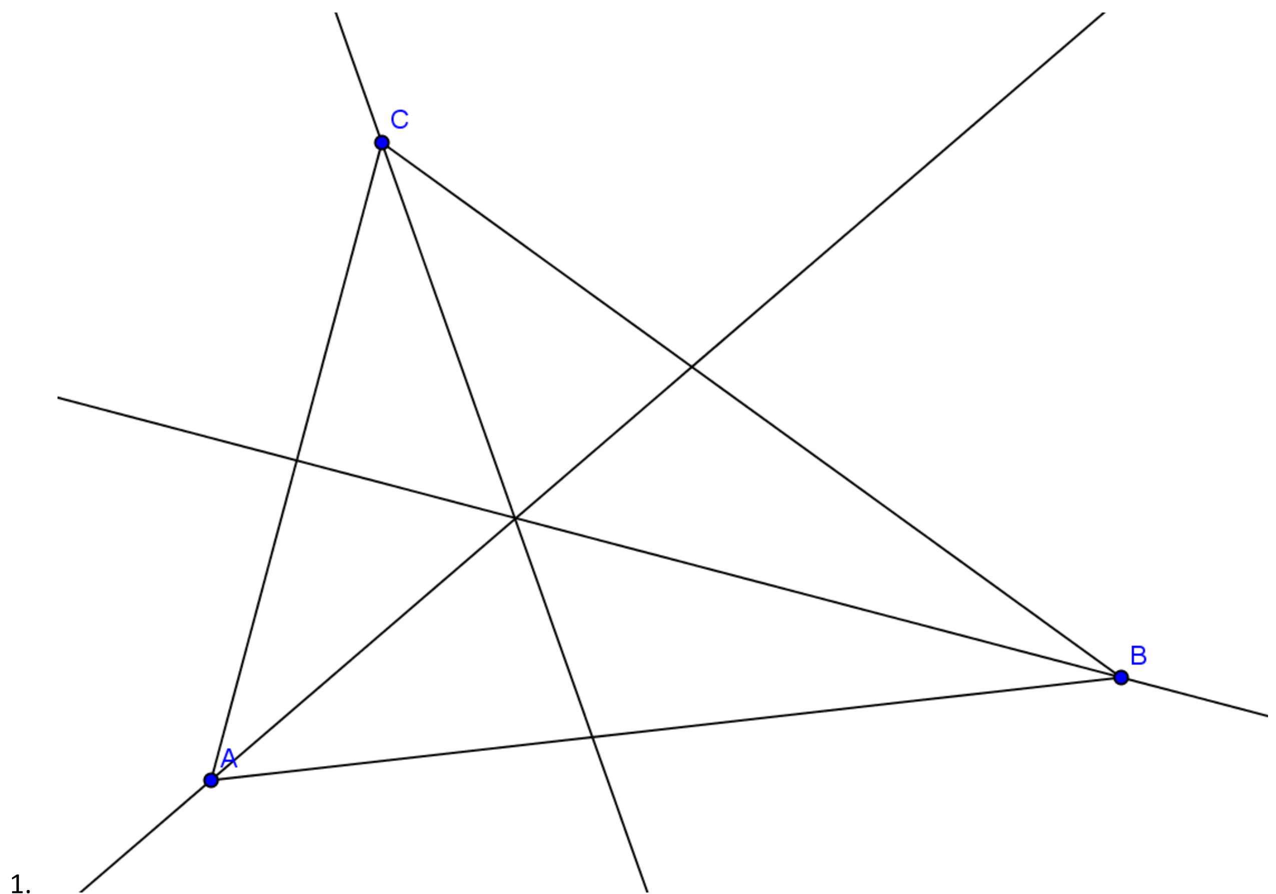
Bijna alle gonioformules uit het wiskunde B-programma zijn aan de orde gekomen. Dit bewijs is op zich al een goede training voor het omgaan met formules. Maar op de eerste plaats is het bewijs veel meer dan een verzameling van technieken. De eerder genoemde buitenbissectrices kunnen een aanzet geven om een onderzoek te doen met bijvoorbeeld GeoGebra naar de buitentrisectrices.

Het Mirakel van Morley



Uitwerkingen van Trisectricestelling.

Opgave 1



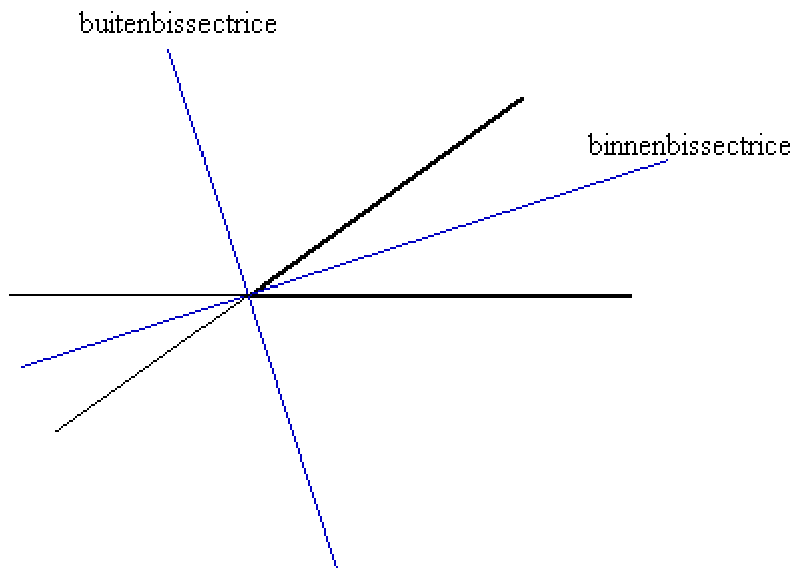
1.

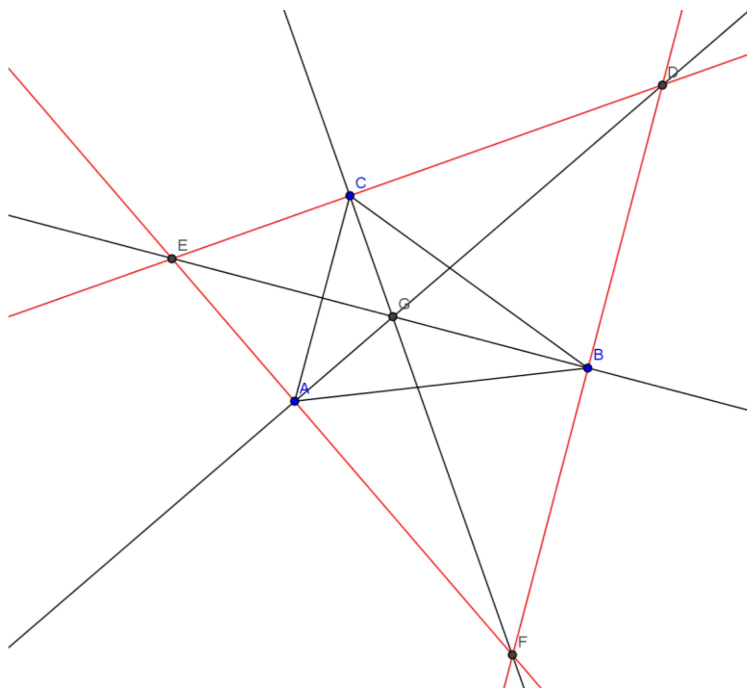
1b. Een buitenbissectrice staat loodrecht op de binnenbissectrice. Dat is gemakkelijk in te zien.

Als men de benen van een hoek verlengt naar de andere kant ontstaat er een paar snijdende lijnen die vier hoeken met elkaar maken. De bissectrices van de twee scherpe hoeken liggen op één lijn. Dat geldt ook voor de bissectrices van de twee stompe hoeken.

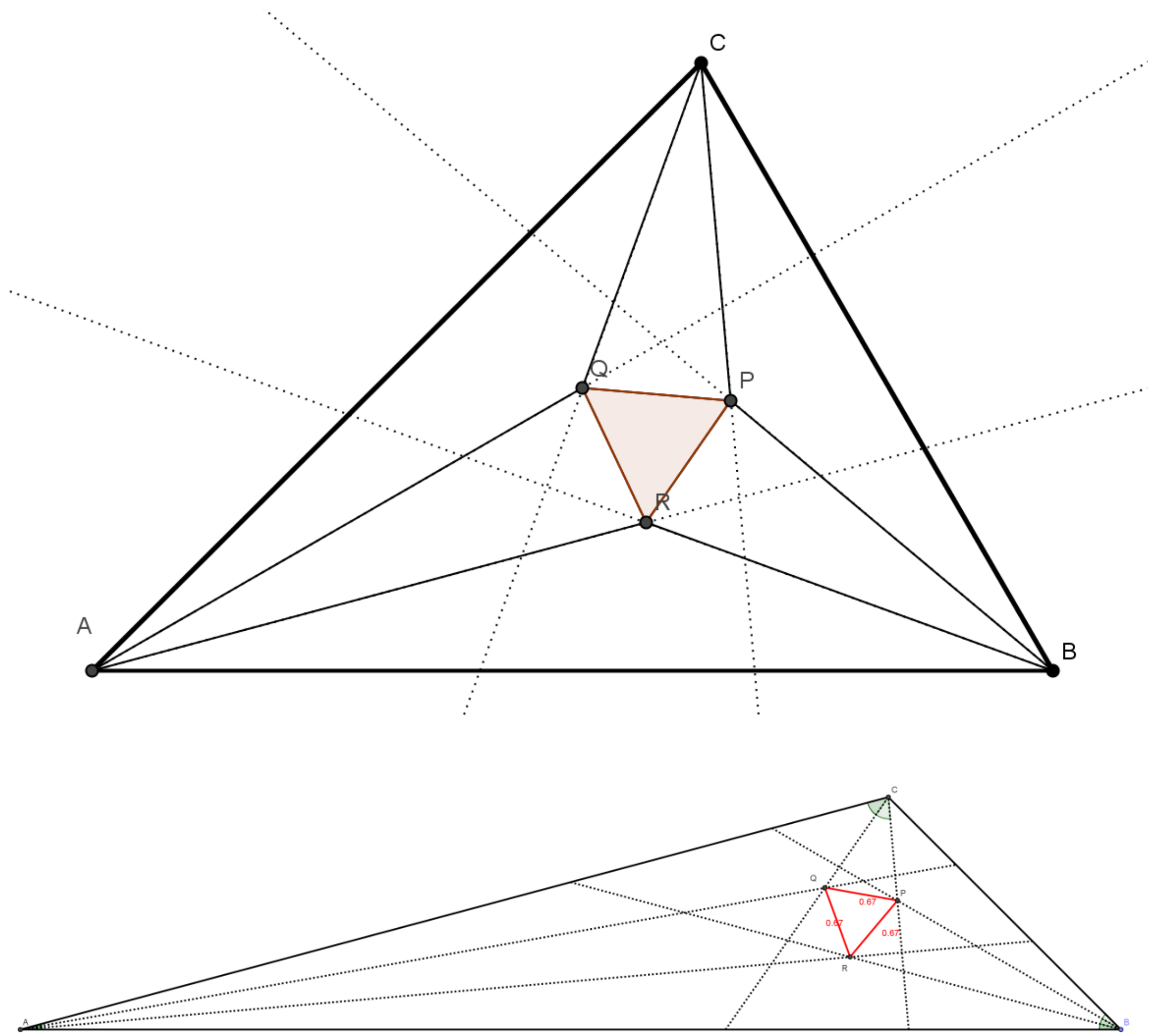
Stel de gegeven hoek gelijk aan 2α. Stel het supplement gelijk aan 2β. Er geldt: 4α+4β=360.

α+β=90. Dus buitenbissectrice staat loodrecht op binnenbisectrice.





Opgave 2



Zoek drie getallen waarvan de som 60 is. Bijvoorbeeld: 5+15+40=60. Je tekent dan een 15-45-120-driehoek.

Opgave 3

Tot nu toe is er geen goed bewijs geleverd met hoeken van zestig graden.

Opgave 4

$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ volgens hoekensom in driehoek *ABC.* Dus na delen door drie geldt:

$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$.

Opgave 5

- $\angle AMD = 3\gamma$
- $\sin(3\gamma) = \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AD}{0,5}$
- $AD = 0,5\sin(3\gamma)$
- $AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot 0,5\sin(3\gamma) = \sin(3\gamma)$

Opgave 6

$\dfrac{BP}{\sin(\gamma)} = \dfrac{BC}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)}$ daar uit volgt:

$$BP = \frac{\sin(\gamma)\cdot BC}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{\sin(\gamma)\cdot\sin(3\alpha)}{\sin(180^\circ - (\beta+\gamma))} = \frac{\sin(\gamma)\cdot\sin(3\alpha)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\sin(\gamma)\cdot\sin(3\alpha)}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

Opgave 7

$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)(1-2\sin^2(\alpha))$
$= 2\sin(\alpha)(1-\sin^2(\alpha)) + \sin(\alpha)(1-2\sin^2(\alpha)) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^2(\alpha)$

Opgave 8

Bekijk $BP = \dfrac{\sin(3\alpha)\cdot\sin(\gamma)}{\sin(60^\circ - \alpha)}$. Je kunt dan deze breuk vereenvoudigen zodat er geen breuk meer is.

Opgave 9

Opgave 10

$(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \gamma) + \beta = 120^\circ + (\alpha + \beta + \gamma) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Opgave 11

Passen we oogst(1) toe dan zijn de andere zijden $\sin(60^\circ + \alpha)$ en $\sin(60^\circ + \gamma)$

Opgave 12

Pas de cosinusregel toe vanuit hoek β.

Opgave 13

Zie oogst(3): $PR^2 = 16\sin^2(\alpha)\cdot\sin^2(\gamma)\cdot(\sin^2(60^\circ+\alpha) + \sin^2(60^\circ+\gamma)$
$-2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\gamma)\cdot\cos\beta)$

Het rode deel kan vervangen worden door $\sin^2(\beta)$ en dan verkrijg je:

$PR^2 = 16\sin^2(\alpha)\cdot\sin^2(\gamma)\cdot\sin^2(\beta)$

Opgave 14

$$PR = 4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)$$

Het maakt niets uit in welke volgorden de drie sinussen staan. Dus vindt je voor *PQ* en *RQ* dezelfde uitdrukkingen. De drie zijden hebben dezelfde lengte dus driehoek *PQR* is gelijkzijdig.

Opgave 15

opgave	regel
6	sinusregel
7	somformule
9	Verdubbelingsformule en Simpsonformule
Na 9	cosinusregel
12	Cosinusregel (tweede keer)